ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f: \mathbb{C} \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη & f στο α τοπ. φραγμ. και γ κλειστή και κατά τμήματα διαφορίσιμη ομοτοπική καμπύλη.

Τότε κατασκευάζοντας την

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} &, z \neq w \\ f'(z) &, z = w \end{cases}$$

Ισχύει το $\int_\gamma g(z)\,dz = 0 \Rightarrow 0 = \int_\gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,dz \Rightarrow$

$$0 = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \int \frac{f(w)}{z-w}\,dz \Rightarrow$$

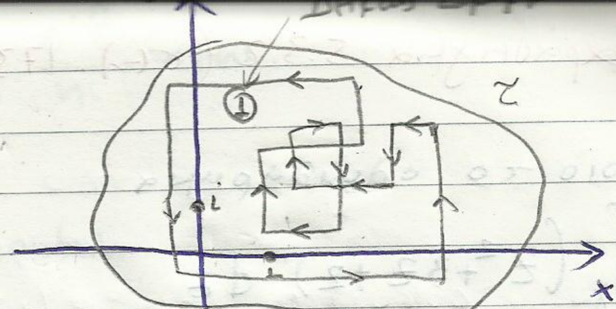
$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_\gamma \frac{f(w)}{z-w}\,dz = f(w)\int_\gamma \frac{1}{z-w}\,dz = f(w)\,I(\gamma,w)\cdot 2\pi i$$

$$\Rightarrow I(\gamma,w)\,f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz$$

ΠΧ

Ποιο το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{e^z ημz + z^2}{z-i} = I$$



οπου γ πολυγωνική καμπύλη του σχήματος

ΛΥΣΗ

$$I = 2\pi i(+1)(e^i ημi + i^2)$$

Επαγωγικά ισχύει:

$$\boxed{f^{(\nu)}(w) = \frac{\nu!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{\nu+1}}\,dz} \quad (1)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Cauchy)

Εκτίμηση της Παραγώγου

Εαν f ολόμορφη στον $B(\alpha,R)$ και συνεχής στο $\overline{B(\alpha,R)}$

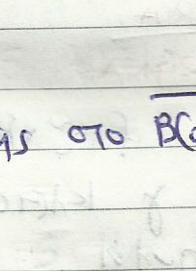
Τότε από (1)

$$|f^{\nu}(w)| \le \frac{\nu!}{2\pi}\max_{z\in\gamma}|f(z)|\frac{1}{R^{\nu+1}}2\pi R = \frac{\nu!}{R^{\nu}}\max_{z\in\gamma}|f(z)|$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

f ολόμορφη στον τ, τότε $\nexists\, \alpha\in\tau : f^{(n)}(\alpha)=0\ \forall n\in\mathbb{N}$ εκτός αν αυτή είναι εκ ταυτότητος μηδέν

Αποδ.



Εστω $A = \{w : f^{(n)}(w)=0,\ \forall n\in\mathbb{N}\} \neq \emptyset$

αλλά f έχει ανάπτυγμα Taylor στο $B(\alpha,r)$: $f(z) = \underbrace{\sum_0^\infty a_n(z-\alpha)^n}_{=0}$ και

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = 0$.

άρα $\forall\, w\in A,\ \exists r>0 : B(w,r)\subseteq A \Rightarrow A$ ανοιχτό (1)

απο την αλλη αν θεωρησουμε ακολουθια
$w_k \underset{\in A}{} \to w$ τοτε $f^{(n)}(w) = \lim_k f^{(n)}(w_k) = 0$

$\Rightarrow w \in A$. Αυτό επεται οτι A κλειστο (2)

Αρα, απο (1) και (2) επεται $A = \mathbb{C}$
Τοτε $f = 0$ στον $\mathbb{C}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ:
Εστω f ολομορφη σε εναν κυκλικο δισκο $B(a, r)$, $a \in \mathbb{R}$
τοτε

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= 2u\left(\frac{z+\bar{a}}{2}, \frac{z-\bar{a}}{2i}\right) - \overline{f(a)} \\ f(z) &= 2iv\left(\frac{z+\bar{a}}{2}, \frac{z-\bar{a}}{2i}\right) + i\,\overline{f(a)} \end{aligned}\right\} \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Πχ
Εστω $u(x,y) = x^2 - y^2$
$f(0) = 3$
$f(z) = \frac{z^2}{2} - \left(\frac{z}{2i}\right)^2 - 3 = z^2 - 3$

(Δηλ. αποφευγονται οι σχεσεις Cauchy-Riemann)

ΘΕΩΡΗΜΑ (Liouville 1ο)
Καθε φραγμενη, ακεραια συναρτηση ειναι παντα σταθερη
Απο

$$|f'(w)| \le \frac{1}{R} \max_{|z-w|=R} |f(z)| \le \frac{1}{R} M \to 0$$

$$\Rightarrow f'(w) = 0,\ \forall w \Rightarrow f(w) = c,\ \forall w$$

Πχ
Εστω $v = \mathrm{Im}(f(z)) \ge 3 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
$g(z) = e^{-if(z)} = e^{-i(u+iv)} = e^{-iu+v} \Rightarrow |g(z)| = e^{-v} \le e^{-3}$
$\Rightarrow g(z) = c$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Liouville 2ο)

Έστω f ακέραια συνάρτηση.
Αν $\exists M>0,\ \varepsilon>0$: $(\forall n\in\mathbb{N})$
$|f^{(n)}(z)| \le M|z|^n \ \forall z\in\mathbb{C}$ με $|z|>\frac{1}{\varepsilon}$
τότε η f ταυτίζεται με πολυώνυμο το πολύ n βαθμού.

Απόδ

$$|f^{(n+1)}(w)| \le \frac{1}{R}\left(\quad\right) \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$f^{(n)}(w)=\alpha_n, \quad f^{(n-1)}(w)=\alpha_n w+\alpha_{n-1}, \ \ldots$$

$$f(w)=\alpha_0+\alpha_1 w+\alpha_2 w^2+\ldots+\alpha_n w^n$$

Εφαρμογή

$|f(z)| \le 5\cdot|z|^{7/2}$, $z\in\mathbb{C}$ και $R=1$

τότε

$$|f(z)\cdot z^{-4}| \le 5\cdot\frac{|z|^{7/2}}{|z|^{3/2}} = 5\,\frac{1}{|z|^{1/2}}, \quad |f(z)\cdot z^{-4}|\le 5,\ \forall |z|\ge 1$$

$$\Rightarrow |f(z)\cdot z^{-4}|\le M,\ \forall z\in\mathbb{C} \Longrightarrow f(z)\cdot z^{-4}=c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(z)|=|c|\cdot|z^4|\le 5\cdot|z|^{7/2} \Rightarrow |c|\cdot|z|^{1/2}\le 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |c|\cdot n^{1/2}\le 5 \text{ αδύνατο } \xRightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} c=0$$